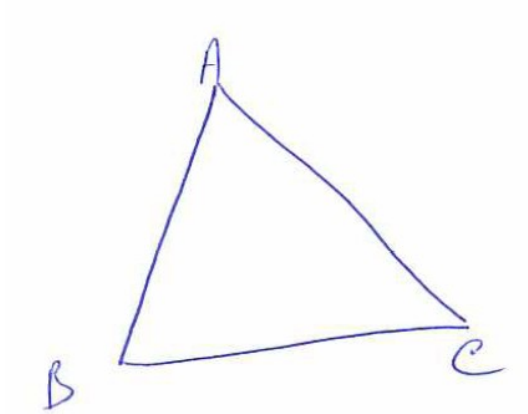
Le Théorème Secret d'Euclide

Il se trouve qu'Euclide a démontré des choses peu désirables qu'il refusait lui même d'admettre comme vraies. Nous allons étudier l'une d'entre-elles: La démonstration que tous les triangles sont isocèles.

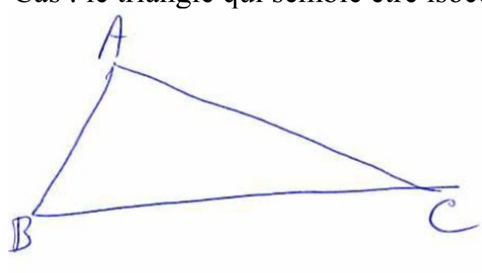
Avant de commencer, on note que le raisonnement logique est composé de prémisses et d'une logique qui permet de construire des conclusions à partir de prémisses déjà démontrées, qui deviennent à leur tour de nouvelles prémisses pour des raisonnements futurs. Si les prémisses sont vraies et le raisonnement correct, alors les conclusions sont vraies aussi.

Donc, si l'on voulait mettre en question la démonstration qui suit, et nous ne pouvons pas conseiller une telle démarche, mais si l'on voudrait tenter de démontrer que ce que nous démontrons n'est pas en fait démontré du tout, alors, on doit s'attacher à démontrer la non-véracité des prémisses ou la non-conformité du raisonnement, car d'attaquer simplement et brutalement les conclusions serait tout à fait inutile.

On commence par 2 cas de figure :



1^{e} Cas : le triangle qui semble être isocèle



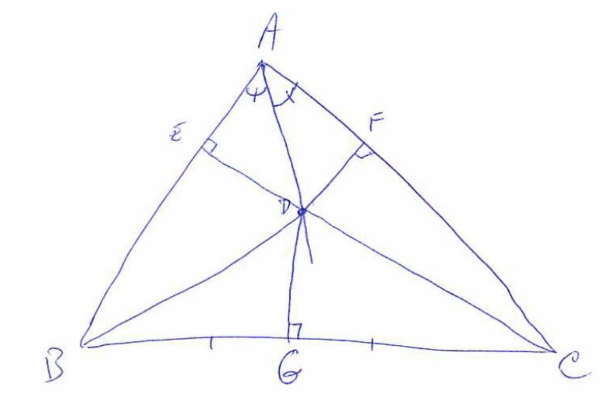
2^{e} Cas : Le triangle qui ne semble pas être isocèle

Nous allons traiter les 2 cas.

D'abord prenons le premier cas. Au triangle ABC, ajoutons les éléments suivants :

- AD : la bissectrice de l'angle A, coupant l'angle A en deux angles égaux,
- DG : la médiatrice de BC, perpendiculaire à BC et le coupant en 2 parties égales,
- DE et DF : qui sont des perpendiculaires depuis le point D aux segments AB et à AC respectivement.

Ce qui nous donne :



1e cas : avec quelques éléments supplémentaires

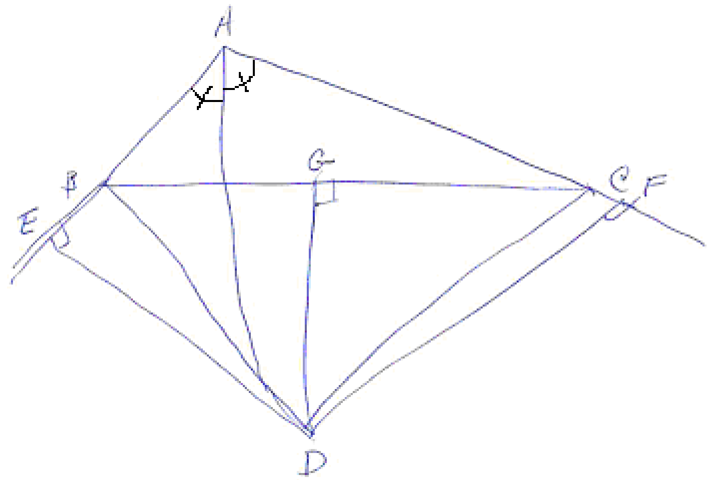
Maintenant, le raisonnement :

1. BD = CD car tous les points sur la médiatrice d'un segment sont équidistants des bouts du segment.
2. Triangle ADE = Triangle ADF car :
    1. angle EAD = angle FAD
    2. AD est un segment commun,
    3. angle EDA = angle FDA par soustraction :
       180° - 90° - angle EAD = 180° - 90° - angle FAD.
3. Ce qui fait que AE = AF, parties correspondantes de triangles =.
4. Triangle droit BDE = triangle droit CDF car :
    1. ED = EF parties correspondantes de triangles =,
    2. les hypoténuses BD = CD démontré en 1. plus haut.
5. Donc, BE = CF, parties correspondantes de triangles =.
6. et par addition d'égaux :
   AE + EB = AF + FC
   et donc :
   AB = AC
7. Triangle ABC est isocèle : CQFD.

Corollaire : Tout triangle est équilatéral.
Démonstration : Puisqu'on peut aussi bien faire la même démonstration avec les côtés AB et BC, triangle ABC est équilatéral.

Et maintenant l'autre cas :

Cette fois, on doit prolonger les segments AB et AC pour pouvoir poser les perpendiculaires, mais le reste est exactement pareil que dans le cas précédant.



2^e cas : avec le support pour la démonstration, mais l'intersection de la bissectrice et la et en dehors du triangle

Maintenant, le raisonnement :

1. BD = CD car tous les points sur la médiatrice d'un segment sont équidistants des bouts du segment.
2. Triangle ADE = Triangle ADF car :
   1. angle EAD = angle FAD
   2. AD est un segment commun,
   3. angle EDA = angle FDA par soustraction :
      180° - 90° - angle EAD = 180° - 90° - angle FAD.
3. Ce qui fait que AE = AF, parties correspondantes de triangles =.
4. Triangle droit BDE = triangle droit CDF car :
   1. ED = FD parties correspondantes de triangles =,
   2. les hypoténuses BD = CD démontré en 1. plus haut.
5. Donc, BE = CE, parties correspondantes de triangles =.
6. et par soustraction d'égaux :
   AE - EB = AF - FC
   et donc :
   AB = AC
7. Triangle ABC est isocèle : CQFD.

Les deux cas sont traités.

Tous les triangles sont isocèles, et équilatérales. Et en fait, toutes les longueurs sont les mêmes...

CQFD